Автоматика и телемеханика, № 4, 2025

© 2025 г. А.М. ПАШАЕВ, академик НАН Азербайджана (mail@naa.az),
А.Д. ИСКЕНДЕРОВ, д-р физ.-мат. наук (asaf.iskander@mail.ru)
(Национальная академия авиации, Баку, Азербайджан),
М.А. МУСАЕВА, д-р философ. мат. наук (musayeva08@inbox.ru)
(Азербайджанский государственный педагогический университет, Баку)

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТАМИ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ШРЕДИНГЕРА

Изучается разрешимость задачи оптимального управления коэффициентом старшей производной и квантовым потенциалом в нелинейном и нестационарном уравнении типа Шредингера, которое обобщает известное квантовомеханическое уравнение. Рассматривается задача одновременного управления несколькими коэффициентами уравнения состояния по критерию качества, являющаяся невязкой граничных данных решения. Для этой задачи найдены условия корректности постановки и доказана теорема существования решения. Рассматривается также задача с «возмущенным» критерием качества, для которой доказана теорема существования и единственности решения. Определен явный вид первой вариации функционала качества и описан итеративный алгоритм решения изучаемых задач. Результаты являются новыми также для стандартного уравнения Шредингера в квантовой механике.

Ключевые слова: разрешимость задачи оптимального управления, уравнение типа Шредингера, управление квантовыми процессами, управление коэффициентами уравнения состояния.

DOI: 10.31857/S0005231025040024, **EDN:** CAZCPL

1. Введение

Уравнение типа Шредингера обобщает известное квантовомеханическое уравнение Шредингера и используется как модель в теориях сверхпроводимости и других областях практики. Это уравнение часто возникает при диагностике наноструктурных материалов, в атомно-молекулярных компьютерных расчетах, когда требуется управлять внутриатомными и внутримолекулярными потенциалами взаимодействия, лазерными импульсами и характеристиками материалов. Это уравнение широко применяется в квантовой обработке информации, в адаптивной оптике и квазиоптике, при изучении бифуркации в нелинейных моделях, магнитных квантовых явлениях и в других областях практики (см. [1–9] и др.). Ранее изучались линейные и билинейные квантовые системы, задачи оптимизации этих систем с одним фактором управления, с реальным или комплексным потенциалом взаимодействия и др. В [9–11] развит метод конечных разностей численного решения таких задач управления.

В современной практике часто возникает необходимость управления многими коэффициентами, наиболее влиятельными квантовыми характеристиками нелинейных и нестационарных процессов [1, 4–10]. Такие задачи управления наиболее трудны для теоретического анализа и численного решения, так как они не только нелинейные, но и в них оператор состояния задается неявно, они часто принадлежат к классу некорректно поставленных задач [9, 10], отсутствуют прямые методы их наблюдения и формулировка критериев качества. Форма задания наблюдения особенно важна для образования критериев качества в квантовых процессах управления, так как она должна соответствовать квантовому характеру изучаемых процессов. В этом смысле граничное наблюдение удобно для измерений, а также для обработки результатов. Изучение процессов управления коэффициентами старших производных уравнения состояния особенно важно [1–3, 6–11]. Ниже изучается задача одновременного оптимального управления коэффициентом старшей производной и квантовым потенциалом в нелинейном нестационарном уравнении типа Шредингера. Рассматривается также задача оптимизации с «возмущенным» функционалом качества, доказаны теоремы существования и единственности решения рассматриваемых задач, описаны итеративные алгоритмы их решения. Основные результаты являются новыми также для обычного уравнения Шредингера в квантовой механике.

2. Постановка задачи

Пусть $l > 0$, $T > 0$ – заданные числа и $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $\Omega_t = (0, l) \times (0, t)$, $\Omega = \Omega_T$, $\psi(x, t)$ является комплексной волновой функцией с пространственной координатой x и временем t. Используемые ниже функциональные пространства введены, например, в [8, 11] и др. Соответственно этому $L_p(0, l)$ лебегово пространство измеримых на $(0, l)$ функций, которые интегрируются со степенью $p \geqslant 1$, $C^k[0, T; B)$ – банахово пространство $k \geqslant 0$ раз непрерывно дифференцируемых на $[0, T]$ функций, значения которых принадлежат банаховому пространству B. Пусть $W_p^k(0, l)$ и $W_p^{k,m}(\Omega)$ пространства Соболева функций с обобщенными производными порядка $k \geqslant 0$ по x и порядка $m \geqslant 0$ по t, которые интегрируются со степенью $p \geqslant 1$. Ниже через $W_\infty^1(0, l) = \left\{w : w \in L_\infty(0, l), \frac{dw}{dx} \in L_\infty(0, l)\right\}$ обозначим банахово пространство с указанными свойствами. Символ $\forall^o$ означает, что указанные свойства имеют место почти для всех значений переменной, а символ $\forall$ означает, что указанные свойства имеют место для всех значений переменной. Положительные постоянные, не зависящие от оцениваемых величин, обозначаются через $c_j, j = 0, 1, 2, \ldots$, ниже всюду $a_i, b_i, s_i, i = 0, 1, 2, \ldots$ – заданные положительные числа.

Рассмотрим управляемый процесс, описываемый следующей начально-краевой задачей для уравнения типа Шредингера:

$$i\rho^2 \frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(v_0(x)\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) - v_1(x)\psi + a_1|\psi|^2\psi = f(x,t), \quad (x,t)\in\Omega, \tag{1}$$

$$\psi(x,0) = \varphi(x), \quad x\in(0,l), \tag{2}$$

$$\frac{\partial\psi(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial\psi(l,t)}{\partial x} = 0, \quad t\in(0,T), \tag{3}$$

где $\rho > 0$, a_1 – заданные действительные числа, $\varphi(x)$, $f(x,t)$ заданные комплексные измеримые функции, удовлетворяющие условиям: $\varphi \in W_2^2(0,l)$, $\frac{d\varphi(0)}{dx} = \frac{d\varphi(l)}{dx} = 0$, $f \in W_2^{0,1}(\Omega)$, коэффициенты уравнения $v_0(x), v_1(x)$ вещественные функции управления.

Предположим, что дополнительно задано граничное наблюдение следующего вида:

$$\psi(0,t) = y_0(t), \quad \psi(l,t) = y_1(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{4}$$

где $y_0 = y_0(t)$, $y_1 = y_1(t)$ – заданные комплексные функции из пространства $L_2(0,T)$. Пусть вектор-функция $v = v(x) = (v_0(x), v_1(x))$ является элементом следующего множества допустимых управлений: $V \equiv \{v = (v_0, v_1) :$ $v_0 \in W_2^1(0,l), v_1 \in L_2(0,l), 0 < b_0 \leqslant v_0(x) \leqslant b_1, \left|\frac{dv_0(x)}{dx}\right| \leqslant b_2,\ 0 < b_3 \leqslant v_1(x) \leqslant b_4,$ $\forall^o x \in (0,l)\}$, где $b_j > 0$, $j = 0,1,\ldots,4$ – заданные числа. При каждом элементе $v \in V$ волновую функцию $\psi = \psi(x,t) \equiv \psi(x,t;v)$, принадлежащую пространству $B \equiv C^0([0,T]; W_2^1(0,l)) \cap C^1([0,T]; L_2(0,l))$, назовем решением прямой задачи, когда она удовлетворяет уравнению (1) для любого $t \in [0,T]$ и почти всех $x \in (0,l)$, условиям (2), (3) для почти всех $x \in (0,l)$ и $t \in (0,T)$. Прямая задача является начально-краевой задачей для уравнения типа Шредингера (1). Эта задача изучалась в [1–11] и др., где установлено, что при принятых выше условиях при каждом $v \in V$ она имеет единственное решение в пространстве B и для него верна следующая априорная оценка:

$$\|\psi(\cdot,t)\|_{W_2^1(0,l)} + \left\|\frac{\partial\psi(\cdot,t)}{\partial t}\right\|_{L_2(0,l)} \leqslant c_0\left(\|\varphi\|_{W_2^1(0,l)} + \|f\|_{L_2(0,T;W_2^1(0,l))}\right). \tag{5}$$

Теперь рассмотрим задачу оптимального управления функцией $v = v(x) = (v_0(x), v_1(x))$ в уравнении (1) с начально-краевыми условиями (2), (3), где требуется минимизировать функционал качества

$$J_0(v) = \beta_0\|\psi(0,\cdot) - y_0\|^2_{L^2(0,T)} + \beta_1\|\psi(l,\cdot) - y_1\|^2_{L^2(0,T)} \tag{6}$$

на множестве V, здесь числа $\beta_0 > 0$, $\beta_1 > 0$ заданы и $\beta_0 + \beta_1 = 1$. Заметим, что решения задач с управлениями в коэффициентах уравнения состояния часто являются неустойчивыми (см. [9–12] и др.) и для них целесообразно изучить также задачу с «возмущенным» критерием качества. Ниже изучается задача минимизации функционала

$$(7)\qquad J_\alpha(v)=\beta_0\|\psi(0,\cdot)-y_0\|^2_{L^2(0,T)}+\beta_1\|\psi(l,\cdot)-y_1\|^2_{L^2(0,T)}+\alpha\|v-\omega\|^2_H$$

на множестве V при условиях (1)–(3), где $\alpha\geqslant 0$ – заданное число, $H\equiv\equiv W_2^1(0,l)\times L_2(0,l)$ – пространство управлений, элемент $\omega\in H$ – заданная вектор-функция. Ради краткости изложения ниже задачи (1)–(3), (6) и (1)–(3), (7) назовем задачами (6) и (7) соответственно.

3. Разрешимость задачи оптимального управления

Теорема 1. Задача (7) при любом $\alpha\geqslant 0$ имеет хотя бы одно решение.

Доказательство дано в Приложении.

Пусть $H_\infty\equiv W^2_\infty(0,l)\times W^1_\infty(0,l)$, $H_1\equiv W_2^4(0,l)\times W_2^1(0,l)$, и задачу оптимального управления изучим на следующем множестве: $V_1\equiv\Big\{v=(v_0,v_1);$ $v_0\in W_2^2(0,l),\ \ v_1\in W_2^1(0,l),\ \ 0<s_0\leqslant v_0(x)\leqslant s_1,\ \ \left|\frac{dv_0(x)}{dx}\right|\leqslant s_2,\ \ \left|\frac{d^2v_0(x)}{dx^2}\right|\leqslant s_3,$ $0<s_4\leqslant v_1(x)\leqslant s_5,\ \left|\frac{dv_1(x)}{dx}\right|\leqslant s_6,\ \forall x\in(0,l)\Big\}$, где $s_i>0,\ i=0,1,2,3,4,5,6$ – заданные числа. Предположим, что функции $\varphi(x)$, $f(x,t)$ удовлетворяют условиям: $\frac{d^3\varphi}{dx^3}\in L_2(0,l)$, $\frac{\partial f}{\partial x}\in W_2^{0,1}(\Omega)$. При этих условиях в [9, 10] доказано, что для каждого элемента $v=v(x)$ из множества V_1 решение прямой задачи (1)–(3) существует, единственно при каждом $t\in[0,T]$, принадлежит пространству $B_1=C^0([0,T];W_2^4(0,l))\cap C^1([0,T];L_2(0,l))$ и верна априорная оценка:

$$(8)\qquad \begin{aligned}&\|\psi(\cdot,t)\|_{W_2^1(0,l)}+\left\|\frac{\partial\psi(\cdot,t)}{\partial t}\right\|_{L_2(0,l)}+\left\|\frac{\partial^2\psi(\cdot,t)}{\partial t^2}\right\|_{L_2(0,l)}\leqslant\\ &\leqslant c_1\left(\|\varphi\|_{W_2^1(0,l)}+\|f\|_{W_2^{1,1}(\Omega)}+\left\|\frac{\partial f}{\partial x}\right\|_{W_2^{1,1}(\Omega)}\right),\quad \forall t\in[0,T].\end{aligned}$$

Теперь на множестве $V_1\subseteq H_1$ рассмотрим аналог задачи (7) о минимизации функционала

$$(9)\qquad J_\alpha(v)=\beta_0\left\|\psi(0,\cdot)-y_0\right\|^2_{L_2(0,T)}+\beta_1\left\|\psi(l,\cdot)-y_1\right\|^2_{L_2(0,T)}+\alpha\left\|v-\omega\right\|^2_{H_1}$$

при условиях (1)–(3), где $\alpha\geqslant 0$ – заданное число, $H_1=W_2^2(0,l)\times W_2^1(0,l)$ – пространство управлений, $\omega\in H_1$ – заданная вектор-функция. Легко проверить, что $V_1\subseteq V$. Если же $\alpha=0$ и $V=V_1$, $H=H_1$, то задачи (7) и (9) совпадают с задачей (6). При $V=V_1$ и $H=H_1$ задачи (7) и (9) совпадают. Примеры, аналогичные приведенным в [9, 10], показывают, что при $\alpha=0$ решение задачи (7) или (9) неустойчиво и неединственное. Однако при $\alpha>0$ верна

Т е о р е м а 2. *В пространстве* H_1 *существует всюду плотное подмножество* K*, что при всех* $\alpha > 0$ *и при* $\omega \in K$ *задача* (9) *имеет единственное решение.*

Доказательство дано в Приложении.

4. Заключение

Указанные теоремы дают основания для решения рассмотренных выше задач. Опыт решения задач оптимального управления показывает, что для этой цели наиболее эффективными методами являются итеративные методы численного решения (см. [2, 9, 10, 13, 16, 17]). Пакеты программ, такие как Maple, Matlab, ANSYS и др. с визуализацией результатов, являются более предпочтительными и дают более удобный аппарат для численного решения. Рассмотрим итерационный процесс решения задачи (7) или (9), основанный на следующей схеме метода условного градиента численного решения:

$$v^{(k+1)}(x) = v^{(k)}(x) + \lambda_k \left(w^{(k)}(x) - v^{(k)}(x) \right), \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $v^{(0)}(x)$ – начальный шаг итераций, который может быть любым элементом множества V (или V_1), параметр алгоритма $\lambda_k \in (0,1)$ выбирается из условия $J_0\left(v^{(k+1)}\right) < J_0\left(v^{(k)}\right)$, элемент $w^{(k)}(x)$ определяется из минимума линейного функционала:

$$\delta J_0(v^{(k)}, w - v^{(k)}) + 2a\langle v^{(k)} + v^{(k-1)}, w - v^{(k)}\rangle \to \infty,$$

где $k = 1, 2, \ldots$ на множестве V (или V_1), $\delta J_0(v)$ – первая вариация функционала $J_0(v)$.

Пусть $h \in H$ – приращение управления $v \in V$ такое, что $v + h \in V$. Первая вариация функционала $J_0(v)$ имеет вид

$$\delta J_0(v, h) = \int\limits_{\Omega} \left[\mathrm{Re} \left(\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x} \right) h_0(x,t) + \right.$$
$$\left. + \mathrm{Re}\left(\psi(x,t)\varphi(x,t)\right) h_1(x,t) \right] dxdt,$$

где $\psi(x,t)$ и $\varphi(x,t)$ являются решениями прямой и сопряженной задач соответственно. Действуя по указанной выше схеме, найдем последовательность управлений $(v^{(k)})$. В [9, 10, 13, 14] и др. дан ряд достаточных условий для данных выше изучаемых задач, которые обеспечивают сходимость вышеприведенной последовательности управлений. Там же изучаются широкие классы итерационных процессов, основанных на вариантах методов градиента, Ньютона и др., для решения экстремальных задач, проведены численный анализ и регуляризация решения в случае неустойчивости задачи.

Доказательство теоремы 1. Из ограниченности снизу функционала $J_\alpha(v)$ следует существование последовательности $(v'(x)) \in V$ минимизации решения задачи (7). Обозначим $\psi_k = \psi_k(x,t) \equiv \psi(x,t;v^k)$, $k = 1,2,\ldots$, $H_\infty \equiv \equiv W^1_\infty(0,l) \times L_\infty(0,l)$. Поскольку множество V является замкнутым, ограниченным и выпуклым подмножеством в пространстве H, из последовательности (v^k) можно выделить подпоследовательность, которую для простоты изложения снова обозначим через (v^k) так, что $v^k_0 \to v_0$ (*) слабо в $L_\infty(0,l)$, $\frac{dv^k_0}{dx} \to \frac{dv_0}{dx}$ (*) слабо в $L_\infty(0,l)$ и $v^k_1 \to v_1$ (*) слабо в $L_\infty(0,I)$ при $k \to \infty$. Кроме того, из определения множества V следует, что оно является (*) слабозамкнутым в пространстве H. Из указанных только что предельных соотношений и вложения пространства $W^k_\infty(0,l)$ в $L_\infty(0,l)$ получаем, что $v^k_0 \to v_0$ сильно в $L_\infty(0,l)$ при $k \to \infty$.

Из априорной оценки (5) следует, что последовательность $\{\psi_k(x,t)\}$ равномерно ограничена по норме B. Тогда из последовательности $\{\psi_k(x,t)\}$ можно выделить подпоследовательность, которую для простоты изложения снова обозначим через $\{\psi_k(x,t)\}$, что $\psi_k(\cdot,t) \to \psi(\cdot,t)$ либо в $W^2_2(0,l)$ и $\frac{\partial\psi_k(\cdot,t)}{\partial t} \to \frac{\partial\psi(\cdot,t)}{\partial t}$ либо в $L_2(0,l)$ для $t \in [0,T]$ при $k \to \infty$. Из компактности вложения пространства B в $C^0([0,T];W^2_0(0,l))$ (см.: [15, с. 214]) следует, что $\|\psi_k(\cdot,l) - \pi(\cdot,l)\|_{W^2_0(0,l)} \to 0$ при $k \to \infty$ равномерно по $t \in [0,T]$. Нетрудно проверить, что каждый элемент последовательности удовлетворяет тождеству

$$\text{(П.1)} \qquad \int\limits_0^l \left\{ \frac{i\rho^2 \partial\psi_k(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(v^k_o(x) \frac{\partial\psi_k(x,t)}{\partial x} \right) - v^k_1(x)\psi_k(x,t) \right\} + \\ + a_1\|\psi_k(x,t)^2\|\psi(x,t) - f(x,t)\|\overline{\eta(x)}dx = 0, \quad k = 1,2,\ldots$$

для всех $t \in [0,T]$ и произвольной функции $\eta \in L_2(0,l)$. Кроме того, $\psi_k(x,t) = = 1,2,\ldots$, удовлетворяют начальное и краевые условия (2) и (3). Если в тождестве (П.1) перейти к пределу по $k = 1,2,\ldots$ для каждой $t \in [0,T]$ и любой функции $\eta \in L_2(0,l)$ получим, что предельная функция $\psi_k(x,t)$ будет удовлетворять этому тождеству. Таким же образом проверяется, что предельная функция $\psi_k(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1) для каждого $t \in [0,T]$ и почти для всех $x \in (0,l)$. При $t = 0$ получим, что $\|\psi_k(\cdot,0) - \psi(\cdot,0)\|_{L_2(0,l)} \to 0$, когда $k \to \infty$. Отсюда и из предельного перехода при $k \to \infty$ в

$$\|\psi_k(\cdot,0) - \varphi\|_{L_2(0,l)} \leqslant \|\psi_k(\cdot,0) - \psi_k(\cdot,0)\|_{L_2(0,l)} + \|\psi_k(\cdot,0) - \varphi\|_{L_2(0,l)},$$

получим, что функция $\psi(x,t)$ удовлетворяет начальному условию (2) почти для всех $x \in (0,l)$. Наконец, докажем, что предельная функция $\psi_k(x,t)$ удовлетворяет граничным условиям (3). Действительно, для функций из пространства B выполняются предельные соотношения $\frac{\partial\psi_k(s,\cdot)}{\partial x} \to \frac{\partial\psi(s,\cdot)}{\partial x}$ слабо в $L_2(0,T)$ при $k \to \infty$, где $s = 0$ и $s = l$. Тогда используя это соотношение, после предельного перехода $k \to \infty$ в равенстве

$$\int\limits_0^T \frac{\partial\psi(s,t)}{\partial x}\eta(t)dt = \int\limits_0^T \left(\frac{\partial\psi(s,t)}{\partial x} - \frac{\partial\psi_k(s,t)}{\partial x}\right)\eta(t)dt + \\ + \int\limits_0^T \frac{\partial\psi_k(s,t)}{\partial x}\eta(t)dt, \quad s = 0, l$$

получим выражение

$$\int\limits_0^T \frac{\partial\psi(s,t)}{\partial x}\eta(t)dt = 0, \quad s = 0, l$$

для любой $\eta(t)$ функции из $L_2(0,T)$. Отсюда следует, что почти при всех $t \in (0,T)$ функция $\psi(x,t)$ удовлетворяет граничным условиям (3). Таким образом, предел $\psi(x,t)$ последовательности $(\psi_k(x,t))$ является решением прямой задачи (1)–(3) при каждом управлении v из V. Кроме того, предельная функция является слабым пределом слабосходящейся последовательности $\{\psi_k(x,t)\}$ для каждого $t \in [0,T]$. Из компактности вложения пространства B в $C([0,l]; L_2(0,T))$ имеем, что $\|\psi_k(x,t) - \psi(x,t)\|_{L_2(0,T)} \to 0$ при $k \to \infty$ для каждого $x \in [0,l]$. Отсюда при $x = 0$, $x = l$ из слабой полунепрерывности снизу нормы в $L_2(0,T)$ и не отрицательности чисел β_0, β_l, α получим справедливость неравенства: $J_\alpha* \leqslant J_\alpha(v) \leqslant J_\alpha*$. Это означает, что элемент $v = v(x) \in V$ является решением задачи (7) при любом $\alpha \geqslant 0$. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Проверим непрерывность функционала $J_0(v)$ на множестве V_1. Пусть $\delta\psi = \delta\psi(x,t) = \psi(x,t; v + \delta v) - \psi(x,t; v)$, где $\delta v \in H_1$ приращение элемента $v \in V_1$, что $v + \delta v \in V_1$, $\psi(x,t; v)$ решение прямой задачи (1)–(3) для элемента $v \in V_1$. Из (1)–(3) следует, что функция $\delta\psi = \delta\psi(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$i\rho^2\frac{\partial\delta\psi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left((v_0(x) + \delta v_0(x))\frac{\partial\delta\psi}{\partial x}\right) - (v_1(x) + \delta v_1(x))\delta\psi + \\ + a_1\left(|\psi_\delta|^2 + |\psi|^2\right)\delta\psi + a_1\psi_\delta\psi\delta\overline{\psi} = \\ = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\delta v_0(x)\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + \delta v_1(x)\psi, \quad (x,t) \in \Omega. \tag{П.2}$$

с однородными начально-краевыми условиями. Для оценки решения этой начально-краевой задачи обе части уравнения (П.2) умножим на функцию $\delta\psi(x,t)$ и результат проинтегрируем по области Ω_t. После вычета из полученного равенства его комплексного сопряжения с учетом однородности начального условия имеем:

$$\|\rho\delta\psi(\cdot,t)\|^2_{L_2(0,l)} = 2a_1 \int \mathrm{Im}(\psi\psi_\delta, (\delta\overline{\psi})^2)\, dxd\tau +$$

$$+ 2\int \mathrm{Im}\left[\left(-\frac{\partial}{\partial x}\left(\delta v_0(x)\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + \delta v_1(x)\psi\right)\delta\overline{\psi}\right] dxdt, \quad \forall t \in [0,T].$$

Применяя к этому тождеству неравенство Коши–Шварца, получим:

$$\|\rho\delta\psi(\cdot,t)\|^2_{L_2(0,l)} \leqslant 2|a_1| \int\limits_{\Omega_t} |\psi_\delta|\,|\psi|\,\delta\psi^2\, dx\, d\tau +$$

$$+\int\limits_{\Omega_t}\left[-\frac{\partial}{\partial x}\left(\delta v_0(x)\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + \delta v_1(x)\psi\right]^2 dx\, d\tau + \tag{П.3}$$

$$+\iint\limits_{\Omega_t} |\delta\psi|^2\; dx\, d\tau,\ \forall\, t \in [0,T].$$

Известно, что если функция $\varphi(.,t) \in W_2^1(0,l)$ не равна нулю на концах отрезка $[0,l]$, тогда для нее выполняется следующее неравенство (см. [15, с. 80, замечание 2.1]):

$$\|\varphi(\cdot,t)\|_{L_2(0,l)} \leqslant c\left\|\frac{\partial\varphi(\cdot,t)}{\partial x}\right\|^{\frac{1}{2}}_{L_2(0,l)} \|\varphi(.,t)\|^2_{L_2(0,l)} + d\,\|\varphi\|_{L_2(0,l)},$$

где $c > 0$, $d > 0$ – некоторые постоянные. Из этого неравенства и априорной оценки (8) решения прямой задачи (1)–(3) при каждом $V \in V_1$ следует, что

$$\|\psi(\cdot,t)\|^2_{L_2(0,l)} \leqslant c_4; \quad \|\psi^2(\cdot,t)\|^2_{L_2(0,l)} \leqslant c_4. \tag{П.4}$$

С учетом этих неравенств в уравнении (П.2), имеем:

$$\|\delta\psi(\cdot,t)\|^2_{L_2(0,l)} \leqslant \left(2|a_1|c_4^2 + 1\right)\int\limits_0^t \|\delta\psi(\cdot,\tau)\|^2_{L_2(0,l)}\, d\tau +$$

$$+\int\limits_{\Omega}\left|-\frac{\partial}{\partial x}\left(\delta v_0(x)\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + \delta v_1(x)\psi\right|^2 dxd\tau, \quad \forall\, t \in [0,T].$$

Оценивая левую часть этого неравенства, имеем:

$$\int\limits_{\Omega_t}\left|-\frac{\partial}{\partial x}\left(\delta v_0(x)\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + \delta v_1(x)\psi\right|^2 dxd\tau \leqslant c_5\int\limits_0^t \|\psi(\cdot,\tau)\|^2_{W_2^2(0,l)}\, d\tau\|\delta v\|^2_{B^1}.$$

Учитывая это неравенство в уравнении (П.2), получим:

$$\|\delta\psi(\cdot,t)\|^2_{L_2(0,l)} \leqslant c_6\int\limits_0^t \|\delta\psi(\cdot,\tau)\|^2_{L_2(0,l)}\,d\tau + c_7\|\delta v\|^2_H, \quad \forall\, t\in[0,T].$$

Применяя к этому неравенству лемму Гронуолла, имеем:

$$\text{(П.5)}\qquad \|\delta\psi(\cdot,t)\|^2_{L_2(0,l)} \leqslant c_8\|\delta v\|^2_{B_1}, \quad \forall\, t\in[0,T].$$

Теперь оценим функцию $\frac{\partial\delta\psi}{\partial x}(x,t)$. Для этой цели обе части уравнения (П.2) умножим на $L(\delta\overline{\psi}) = -\frac{\partial}{\partial x}\left((v_0(x)+\delta v_0(x))\frac{\partial\delta\overline{\psi}}{\partial x}\right)$ и интегрируем полученное выражение по области Ω_t:

$$\int\limits_{\Omega_t}\Bigg(i\rho^2\frac{\partial\delta\psi}{\partial t}L(\delta\psi) - |L(\delta\psi)|^2 - (v_0(x)+\delta v_0(x))\delta\psi L(\delta\psi) +$$
$$+ a_1\left(|\psi_\delta|^2+|\psi|^2\right)\delta\psi L(\delta\overline{\psi}) + a_1\psi_\delta\psi\delta\overline{\psi}L(\delta\overline{\psi})\Bigg)dxd\tau =$$
$$= \int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\delta v_0(x)\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) - \delta v_1(x)\psi\right)L(\delta\overline{\psi})dxd\tau, \quad \forall\, t\in[0,T].$$

Интегрируем по частям относительно x в обеих частях этого уравнения и из полученного равенства вычтем его комплексное сопряженное, тогда получим:

$$\int\limits_{\partial_t}\rho^2\frac{\partial}{\partial t}\Big(v_o(x)+\delta v_o(x)\Big)\left|\frac{\partial\delta\psi}{\partial x}\right|^2 dxd\tau =$$
$$= 2\int\limits_{\Omega t}\left[\mathrm{Im}\Big(v_o(x)+\delta v_o(x)\Big)\left(\frac{dv_1(x)}{dx}+\frac{d\delta v_1(x)}{dx}\right)\delta\psi\frac{\partial\delta\overline{\psi}}{\partial x}\right]dxd\tau -$$
$$- 2a_1\int\limits_{\Omega_t}\left[\mathrm{Im}\Big(v_o(x)+\delta v_o(x)\Big)\frac{\partial}{\partial x}\Big(\Big|\psi_\delta\Big|^2+\Big|\psi\Big|^2\Big)\delta\psi\frac{\partial\delta\overline{\psi}}{\partial x}\right]dxd\tau -$$
$$- 2a_1\int\limits_{\Omega_t}\left[\mathrm{Im}\Big(v_o(x)+\delta v_o(x)\Big)\frac{\partial}{\partial x}\Big(\psi_\delta\psi\Big)\delta\overline{\psi}\frac{\partial\delta\overline{\psi}}{\partial x}\right]dxd\tau -$$
$$- 2a_1\int\limits_{\Omega_t}\left[\mathrm{Im}\Big(v_o(x)+\delta v_o(x)\Big)\psi_\delta\psi\left(\frac{\partial\delta\overline{\psi}}{\partial x}\right)^2\right]dxd\tau -$$
$$-2\int\limits_{\Omega_t}\left[\mathrm{Im}\Big(v_o(x)+\delta v_o(x)\Big)\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x}\Big(\delta v_o(x)\frac{\partial\psi}{\partial x}\Big)-\delta v_1(x)\psi\right]\frac{\partial\delta\overline{\psi}}{\partial x}\right]dxd\tau, \ \ \forall\, t\in[0,T].$$

Если здесь учтем, что $v+\delta v \in V_1$, $\delta\psi\,(x,0)=0$, $x\in(0,l)$, тогда с учетом неравенства Коши–Шварца и оценок (П.4), имеем

$$s_0\left\|\frac{\partial\delta\psi(\cdot,t)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)} \leqslant c_9\int\limits_0^t\left\|\frac{\partial\delta\psi(\cdot,\tau)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)} d\tau + c_{10}\int\limits_{\Omega_t}|\delta\psi|^2\,dxd\tau +$$
$$+\,4s_1\int\limits_{\Omega_t}|\delta v_0(x)|^2\left|\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3}\right|^2\,dxd\tau + 8s_1\int\limits_{\Omega_t}\left|\frac{d\delta v_0(x)}{dx}\right|^2\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right|^2\,dxd\tau +$$
$$+\,4s_1\int\limits_{\Omega_t}\left|\frac{d\delta v_1(x)}{dx}\right|^2|\psi|^2\,dxd\tau + \tag{П.6}$$
$$+\,4s_1\int\limits_{\Omega_t}\left(\left|\frac{d^2\delta v_0(x)}{dx^2}\right| + |\delta v_1(x)|\right)^2\left|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|^2\,dxd\tau +$$
$$+\,c_8\,|a_1|\,(2+s_1)\int\limits_{\Omega_t}\left(\left|\frac{\partial\psi_\delta}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|\right)^2|\delta\psi|^2\,dxd\tau,\ \forall t\in[0,T],$$

где $c_9 = s_1(|a_1|c_4 + |a_1|c_4^2 + 1 + s_5)$, $c_{10} = s(|a_1|c_4^2 + s_5)$, $\forall\, t\in[0,T]$. Теперь оценим последнее слагаемое в правой части этого неравенства. Известно, что для произвольной функции $\varphi(\cdot,t)\in W_\lambda(0,l)$, $\forall\, t\in[0,T]$ верно следующее неравенство [15, с. 79–80]:

$$\left\|\frac{\partial\varphi(\cdot,t)}{\partial x}\right\|_{L_\infty(0,l)} \leqslant c_0\left\|\frac{\partial\varphi(\cdot,t)}{\partial x}\right\|_{L_2(0,l)}\|\varphi(\cdot,t)\|_{L_2(0,l)},\quad \forall\, t\in[0,T], \tag{П.7}$$

где $c_0>0$ – некоторая постоянная. Если в этом неравенстве вместо функции $\varphi(x,t)$ возьмем $\frac{\partial\psi_\delta(x,t)}{\partial x}$ и $\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}$ воспользуемся (П.5), (П.6), тогда для этих функций имеем:

$$\left.\frac{\partial\psi_\delta(\cdot,t)}{\partial x}\right|_{L_\infty(0,l)} \leqslant c_{11},\qquad \left|\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}\right|_{L_\infty(0,l)} \leqslant c_{11}. \tag{П.8}$$

Используя эти оценки в (7) и учитывая неравенство (П.5), получим:

$$\left\|\frac{\partial\delta\psi(\cdot,t)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)} \leqslant c_{12}\int\limits_0^t\left\|\frac{\partial\psi(\cdot,t)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)} d\tau + c_{13}\left\|\delta v\right\|^2_{B_1}.$$

Применяя сюда известную лемму Гронуолла, получим оценку

$$\left\|\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)} \leqslant c_{15}\|\delta v\|^2_{B_1},\quad \forall\, t\in[0,T].$$

Объединяя эту оценку с оценкой (П.5), имеем:

$$\left\|\delta\psi(\cdot,t)\right\|^2_{W_2^1(0,l)} \leqslant c_{15}\|\delta v\|^2_{B_1}, \quad \forall\, t\in[0,T]. \tag{П.9}$$

Преобразуем приращение функционала $J_0(v)$ на произвольном элементе $v\in V_1$:

$$\begin{gathered}\Delta J_0(\nu) = J_0(\nu+\delta\nu) - J_0(\nu) = \\ = 2\beta_0\int\limits_0^T \mathcal{R}\epsilon\left[(\psi(0,t)-y_0(t))\,\delta\psi(0,t)\right]\,dt+ \\ +2\beta_1\int\limits_0^t \mathcal{R}\epsilon\left[(\psi(l,t)-y_1(t))\,\delta\psi(l,t)\right]\,dt+ \\ +\beta_0\left\|\delta\psi(x,t)\right\|^2_{L_2(0,T)} + \beta_1\left\|\delta\psi(x,t)\right\|^2_{L_2(0,T)}.\end{gathered} \tag{П.10}$$

Из теоремы вложения для следа функций из пространства $W_2^{1,0}(\Omega)$, имеем:

$$\|\psi(0,\cdot)\|^2_{L_2(0,T)} + \|\psi(l,\cdot)\|^2_{L_2(0,T)} \leqslant c_{16}\|\psi\|^2_{W_2^{1,0}(\Omega)},$$
$$\|\delta\psi(0,\cdot)\|^2_{L_2(0,T)} + \|\delta\psi(l,\cdot)\|^2_{L_2(0,T)} \leqslant c_{16}\|\delta\psi\|^2_{W_2^{1,0}(\Omega)}.$$

Из этих неравенств следует, что:

$$\|\psi(0,\cdot)\|^2_{L_2(0,T)} + \|\psi(l,\cdot)\|^2_{L_2(0,T)} \leqslant c_{17}, \tag{П.11}$$

$$\|\delta\psi(0,\cdot)\|^2_{L_2(0,T)} + \|\delta\psi(l,\cdot)\|^2_{L_2(0,T)} \leqslant c_{17}. \tag{П.12}$$

Применяя к выражению (П.10) неравенство Коши–Шварца, используя (П.11), (П.12), а также учитывая условие $y_0, y_1 \in L_2(0,l)$, получим оценку:

$$|\Delta J_0(v)| \leqslant c_{19}(\|\delta v\|_{B^1} + \|\delta v\|^2_{B_1}), \quad v\in V_1.$$

Это неравенство показывает непрерывность функционала $J_0(v)$ на множестве V_1. Функционал $J_0(v)$ положителен: $J_0(v)\geqslant 0$ для $v\in V_1$. Кроме того, множество V_1 является замкнутым, ограниченным и выпуклым множеством в гильбертовом пространстве H_1. Гильбертовы пространства являются равномерно выпуклыми. Если функционал $I_0(v)$ полунепрерывен снизу и ограничен снизу на замкнутом ограниченном множестве $U\subset X$ равномерно выпуклого банахова пространства X, тогда, как доказано в [16], существует такое всюду плотное подмножество $K\subset X$, что для любых $w\in K$ и при любом $\alpha>0$ функционал $I_0(v)+\alpha\|v-w\|^2_X$ достигает минимального значения на единственном элементе множества $K\cap U$. Для задачи (9) все условия и утверждения этой теоремы удовлетворяются. Поэтому утверждение теоремы верно. Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Воронцов И.М., Шмальсдузеи В.И.* Основы адаптивной оптики. М.: Наука, 1985.
2. «Interatomic Potentials for Atomistic Simulations» // Materials Research Society Bulletin. 1996. V. 21. No. 2. P. 3–97.
3. *Балакин А.А., Балакина М.А., Пермитин Г.В., Смирнов А.И.* Скалярное уравнение для волновых пучков в магнитной плазме // Физика плазмы. 2007. Т. 33. № 4. С. 334–345.
4. *Бутковский А.Г., Самойленко Ю.И.* Управление квантово-механическими процессами. М.: Наука, 1994.
5. *Саябаев В.Ж.* Задача Коши для линейного дифференциального уравнения с вырождением и усреднение аппроксимирующих ее регуляризацией // Современная математика. Фундаментальные направления. Т. 43. 2012. С. 3–172.
6. *Кротов В.Ф., Булатов А.В., Батрушка О.В.* Оптимизация линейных систем с управляемыми коэффициентами // АиТ. 2011. № 6. С. 64–78.
7. *Baudoin L., Kavian O., Fuel J.-P.* Regularity for Schrodinger equation with singular potentials and application to bilinear optimal control // J. Differ. Equat. 2005. V. 21. No. 6. P. 188–222.
8. *Искендеров А.Д., Ягубов Г.Я.* Оптимальное управление нелинейными квантово-механическими системами // АиТ. 1989. № 12. С. 27–38.
9. *Искендеров А.Д., Ягубов Г.Я., Мусаева М.А.* Идентификация квантовых потенциалов. Баку: Чашмоглу, 2012.
10. *Мусаева М.А.* Вариационные методы определения квантовых потенциалов. Баку: Елм-Техсил, 2018.
11. *Мусаева М.А.* Вариационный метод определения комплексных коэффициентов нелинейного и нестационарного уравнения типа Шредингера // Журн. выч. мат. и мат. физики. 2020. Т. 60. № 11. С. 1985–1997.
12. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.
13. *Тихонов А.Н., Леонов В.С., Ягола А.Г.* Нелинейные некорректные задачи. М.: КУРС, 2017.
14. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М.: МЦНМО, 2011.
15. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1964.
16. *Goebel M.* On existence of optimal control // Math. Nachr. 1978. V. 93. No. 1. P. 67–73.
17. *Лапин А.В.* Итерационные методы решения сеточных вариационных неравенств. Казань: КГУ, 2008.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.В. Арутюновым.

Поступила в редакцию 31.05.2024

После доработки 30.11.2024

Принята к публикации 09.12.2024